数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 92-99

写像の列を用いた近似点列の収束について

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 序論

H を実 Hilbert 空間とし, A を H 上で定義された極大単調作用素とする. 凸関数の最小化問題や変分不等式問題等, 多くの問題に関連がある A の零点 $A^{-1}0 = \{x \in H : 0 \in Ax\}$ を求めるという問題に対し, 次のような近接点法と Mann 型の反復的手法を融合させた定理が証明されている.

定理 1 (Eckstein-Bertsekas[2], 上村・高橋 [3]). A を実 Hilbert 空間 H 上の極大単調作用素とし, $A^{-1}0$ が空でないとする. 点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を, 実数列 $\{\alpha_n\} \subset [-b, b] \subset]-1, 1[$ と $\{r_n\} \subset [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ に対し

$$
\begin{aligned}
&x_1 \in H,\\
&y_n = (I + r_nA)^{-1}x_n + f_n,\\
&x_{n+1} = \alpha_nx_n + (1 - \alpha_n)y_n \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

で定義する. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点に弱収束する.

この定理を, 極大単調作用素の列を用いる形にしたものが次の定理である.

定理 2 (木村 [4]). H を実 Hilbert 空間とし, $\{A_n\}$ を H 上の極大単調作用素の列とする. C_0 を H の閉凸部分集合で, 以下の条件をみたすものとする.

(i) 任意の $z \in C_0$ に対して, H のある点列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$

に対して $w_n \in A_n z_n$ をみたしかつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - z\| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| < +\infty$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ において $u_n \in A_n v_n$ をみたす H の点列 $\{u_n\}$ および $\{v_n\}$ に対し, $\{u_n\}$ が 0 に強収束するならば, $\{v_n\}$ の弱収束する部分列の極限は C_0 に属する.

このとき, 実数列 $\{\alpha_n\} \subset [0, b] \subset [0, 1[$ に対する点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_n x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義すると $\{x_n\}$ は C_0 の点に弱収束する. ここで $J_n = (I + A_n)^{-1}$ である.

この定理で用いられる係数 $\{\alpha_n\}$ については, その後 $\{\alpha_n\} \subset [-b, b] \subset]-1, 1[$ という弱い条件に置き換え, 定理 1 を一般化した形で成り立つことが後に示された [5].

本稿では定理 2 を共通不動点をもつ非拡大写像の列に対して適用する方法を提示し, 共通不動点へ弱収束する点列の構成法を紹介する.

2 準備

Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合 C に対し, $T : C \to C$ が非拡大であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことをいう. また, ある $k \in]0, 1[$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$$

が成り立つとき, T は縮小写像と呼ばれる. T が縮小写像ならば, T は不動点をただ一つもつ. すなわち, $z = Tz$ をみたす $z \in C$ が一意に定まる. これに対して非拡大写像は常に不動点をもつとは限らないが, 不動点集合 $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$ は常に閉凸集合となることが知られている.

Hilbert 空間の空でない閉凸集合 C と $x \in H$ に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

をみたす点 x_0 は常に一意に存在する. x に対してこの点 x_0 を対応させる写像 P を C への距離射影と呼ぶ. Hilbert 空間の閉凸集合への距離射影は非拡大写像である. また, 定義から明らかな通り, $F(P)=C$ である.

H 上の集合値写像 A が, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$ をみたす任意の $x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ に対して

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

をみたすとき, A を単調作用素という. 単調作用素の例としては, C 上の非拡大写像 T と恒等写像 I を用いて $A = I - T$ で H 上の写像 A を定義すると, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle &= \langle x_1 - x_2, (I-T)x_1 - (I-T)x_2 \rangle \\
&= \langle x_1 - x_2, (x_1 - x_2) - (Tx_1 - Tx_2) \rangle \\
&\geq \|x_1 - x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\| \|Tx_1 - Tx_2\| \\
&\geq \|x_1 - x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\| \|x_1 - x_2\| = 0
\end{aligned}$$

となるので, A は一価の単調作用素となる. また, 単調作用素 A と $x \in H$, $r \in]0, +\infty[$ に対して

$$(I + rA)^{-1}x = \{y \in H : x \in y + rAyx\}$$

とすると, A の単調性より $(I+rA)^{-1}x$ はたかだか 1 点からなる集合であることがわかる. この $(I+rA)^{-1}$ を A のリゾルベントという. リゾルベントは A の零点 $A^{-1}0 = \{z \in H : Az = 0\}$ を不動点集合とする非拡大写像であることが知られている. また, 一般に集合値写像 F の定義域を $\operatorname{dom} F$, 値域を $\operatorname{ran} F$ とあらわすことにすると, A とリゾルベント $(I+rA)^{-1}$ の間には

$$\operatorname{dom}(I + rA)^{-1} = \operatorname{ran}(I + rA), \quad \operatorname{ran}(I + rA)^{-1} = \operatorname{dom} A$$

という関係があることが容易にわかる.

単調作用素 A は, グラフの包含関係においてそれを真に含むような単調作用素が存在しないとき, 極大単調作用素と呼ばれる. A が極大単調作用素であることの必要十分条件は $\operatorname{ran}(I+rA) = H$ が成り立つことであることが知られており, これはすなわち, リゾルベント $(I+rA)^{-1}$ が H 上の一価写像であることと同値である.

非拡大写像および単調作用素に関する基本的性質の詳細は [6] を参照せよ.

本節の最後に Bruck の定理を紹介する.

定理 3 (Bruck[1]). C を狭義凸 Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし, $\{S_k\}$ を共通不動点をもつ C 上の非拡大写像の列とする. 正の実数列 $\{\beta_k\}$ が $\sum_{i=k}^{\infty}\beta_k = 1$ をみたすとき, $T: C \to C$ を $x \in C$ に対して

$$Tx = \sum_{i=k}^{\infty} \beta_k T_k x$$

と定義することができ, さらに T の不動点は $\{S_k\}$ の共通不動点と一致する.

Hilbert 空間は狭義凸 Banach 空間でもあるので, この結果は次節の定理の証明で用いることができる.

3 非拡大写像列の共通不動点近似

C を H の空でない閉凸部分集合とし, $z_0 \in C$, $\beta_0 \in]0,1[$ とするとき, $S: C \to C$ が非拡大写像ならば $U: C \ni x \mapsto \beta_0 z_0 + (1-\beta_0)Sx \in C$ は縮小写像となる. 実際, $x, y \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\|Ux - Uy\| &= \|(\beta_0 z_0 + (1-\beta_0)Sx) - (\beta_0 z_0 + (1-\beta_0)Sy)\| \\ &\leq (1-\beta_0)\|Sx - Sy\| \\ &\leq (1-\beta_0)\|x - y\|\end{aligned}$$

となり, $0 < 1-\beta_0 < 1$ より U は縮小写像である. さらに P を H から C への距離射影とすると, $x, y \in H$ に対し

$$\|UPx - UPy\| \leq (1-\beta_0)\|Px - Py\| \leq (1-\beta_0)\|x - y\|$$

となり, UP は H から C への縮小写像となる. よって, UP は唯一の不動点 $z \in C$ をもつ. このことから, $z_0 \in C$ と $\beta_0 \in]0,1[$ が与えられているとき, z に関する方程式

$$z = \beta_0 z_0 + (1-\beta_0)SPz$$

の解は一意に定まることがわかる. この解は非拡大写像 UP を用いて定義された H 上の単調作用素 $I - UP$ に対するリゾルベントと一致することが知られており, この事実を用いて次の定理が成り立つことがわかる.

定理 4. H を実 Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. $\{T_k\}$ を C から C への非拡大写像列とし, 共通不動点が存在すると仮定する. $\{\beta_n\}$ を $\{\beta_n\} \subset]0,b] \subset$

$]0,1[$ をみたす実数列, $\{\gamma_k\}$ を $\{\gamma_n\} \subset]0,1[$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1$ をみたす実数列とする. ここで, $x_1 \in C$ とし, $x_n \in C$ に対して x_{n+1} を

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) S_n x_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

をみたす唯一の点として定義することで帰納的に点列 $\{x_n\}$ を構成する. ただし,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k T_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k T_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義される C から H への非拡大写像である. このとき $\{x_n\}$ は $\{T_k\}$ の共通不動点に弱収束する.

証明. 点列 $\{x_n\}$ は C に含まれるから, $\{x_n\}$ を定める漸化式

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) S_n x_{n+1}$$

は H から C への距離射影 P を用いて

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) S_n P x_{n+1}$$

としてもよいことがわかる. これを変形すると

$$\frac{1}{\beta_n}(x_{n+1} - (1-\beta_n) S_n P x_{n+1}) = x_n$$

より

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(\frac{1}{\beta_n}(I - (1-\beta_n) S_n P) \right)^{-1} x_n \\
&= \left(\frac{1}{\beta_n}(\beta_n I + (1-\beta_n) I - (1-\beta_n) S_n P) \right)^{-1} x_n \\
&= \left(\frac{1}{\beta_n}(\beta_n I + (1-\beta_n)(I - S_n P)) \right)^{-1} x_n \\
&= \left(I + \frac{1-\beta_n}{\beta_n}(I - S_n P) \right)^{-1} x_n
\end{aligned}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ. このとき,

$$A_n = \frac{1-\beta_n}{\beta_n}(I - S_n P)$$

とすると, S_nP が非拡大写像なので A_n は一価の単調作用素である. また, この A_n は極大単調作用素となっていることもわかる. 実際, 縮小写像の不動点定理を用いると, 任意の $y \in H$ に対して $x \in H$ が一意に存在して

$$x = \beta_n y + (1-\beta_n)S_nPx$$

が成り立つが, この式から

$$\begin{aligned}(I+A_n)x &= x + \frac{1-\beta_n}{\beta_n}(x - S_nPx)\\ &= \frac{1}{\beta_n}(x-(1-\beta_n)S_nPx) = \frac{\beta_n y}{\beta_n} = y\end{aligned}$$

となり, $\mathrm{ran}(I+A_n) = H$, すなわち A_n が極大単調であることが示される. ここで

$$\emptyset \neq C_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \subset C$$

とし, $S : C \to C$ を $x \in C$ に対して

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k x$$

で定義すると, 定理 3 より

$$C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = F(S)$$

が成り立つことがわかる. この C_0 に対して定理 2 を適用するために条件 (i) および (ii) が成立することを示そう. 条件 (i) については, $z \in C_0$ に対して, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $z_n = z$, $w_n = 0$ とすると

$$A_n z_n = A_n z = \frac{1-\beta_n}{\beta_n}(z - S_nPz) = \frac{1-\beta_n}{\beta_n}(z - S_n z) = 0 = w_n$$

であるから, (i) がみたされることがわかる. 条件 (ii) が成り立つことをを示すために, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $u_n = A_n v_n$ をみたす点列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ で $\{u_n\}$ が 0 に強収束するものを考えよう. $\{v_n\}$ の部分列 $\{v_{i_n}\}$ が v_0 に弱収束すると仮定すると,

$$\begin{aligned}\|v_{i_n} - SPv_0\|^2 &= \|v_{i_n} - v_0 + v_0 - SPv_0\|^2\\ &= \|v_{i_n} - v_0\|^2 + 2\langle v_{i_n} - v_0, v_0 - SPv_0\rangle + \|v_0 - SPv_0\|^2\end{aligned}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つので

$$
\begin{aligned}
\|v_0 - SPv_0\|^2 &= \lim_{n\to\infty}(\|v_{i_n} - SPv_0\|^2 - \|v_{i_n} - v_0\|^2 - 2\langle v_{i_n} - v_0, v_0 - SPv_0\rangle) \\
&= \lim_{n\to\infty}(\|v_{i_n} - SPv_0\|^2 - \|v_{i_n} - v_0\|^2) - 2\lim_{n\to\infty}\langle v_{i_n} - v_0, v_0 - SPv_0\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}((\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\| + \|SPv_{i_n} - SPv_0\|)^2 - \|v_{i_n} - v_0\|^2) + 0 \\
&\le \lim_{n\to\infty}((\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\| + \|v_{i_n} - v_0\|)^2 - \|v_{i_n} - v_0\|^2) \\
&= \lim_{n\to\infty}(\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\|^2 + 2\langle v_{i_n} - SPv_{i_n}, v_{i_n} - v_0\rangle) \\
&= \lim_{n\to\infty}\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\|^2 + 2\lim_{n\to\infty}\langle v_{i_n} - SPv_{i_n}, v_{i_n} - v_0\rangle
\end{aligned}
$$

となる．ここで, $\{v_{i_n}\}$ は有界な点列であることから

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\|v_{i_n} - S_{i_n}Pv_{i_n}\| + \lim_{n\to\infty}\|S_{i_n}Pv_{i_n} - SPv_{i_n}\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_{i_n}}{1-\beta_{i_n}}\left\|\frac{1-\beta_{i_n}}{\beta_{i_n}}(I - S_{i_n}P)v_{i_n}\right\| + \lim_{n\to\infty}\|S_{i_n}Pv_{i_n} - SPv_{i_n}\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_{i_n}}{1-\beta_{i_n}}\|A_{i_n}v_{i_n}\| + \lim_{n\to\infty}\|S_{i_n}Pv_{i_n} - SPv_{i_n}\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-b}\|u_n\| + \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=i_n+1}^{\infty}\gamma_k(T_kPv_{i_n} - T_{i_n+1}Pv_{i_n})\right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=i_n+1}^{\infty}\gamma_k(T_kPv_{i_n} - T_{i_n+1}Pv_{i_n})\right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=i_n+1}^{\infty}\gamma_k(\|T_kPv_{i_n} - z\| + \|z - T_{i_n+1}Pv_{i_n}\|) \\
&\le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=i_n+1}^{\infty}\gamma_k(\|v_{i_n} - z\| + \|z - v_{i_n}\|) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\|v_0 - SPv_0\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|v_{i_n} - SPv_{i_n}\|^2 + 2\lim_{n\to\infty}\langle v_{i_n} - SPv_{i_n}, v_{i_n} - v_0\rangle = 0,
$$

つまり v_0 は SP の不動点である．よって $v_0 = SPv_0 \in C$ より $Pv_0 = v_0$ であるから

$$
v_0 = SPv_0 = Sv_0
$$

となり, v_0 は S の不動点, すなわち $v_0 \in C_0$ が成り立つことがわかる. よって条件 (ii) が成り立つことが示された. したがって, 定理 2 より $\{x_n\}$ は $\{T_k\}$ の共通不動点 C_0 の点に弱収束する. $\square$

参考文献

[1] R. E. Bruck, Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[2] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, *On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators*, Math. Programming **55** (1992), 293–318.

[3] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[4] 木村泰紀, 極大単調作用素の列を用いた収束定理と作用素の零点近似, 非線形解析学と凸解析学の研究, 数理解析研究所講究録 1484, 京都大学数理解析研究所, 2006, pp. 79–86.

[5] Y. Kimura, *Approximating zeros of a monotone operator with iterative algorithms*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Okinawa, Japan) (W. Takahashi and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, to appear.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.